сек

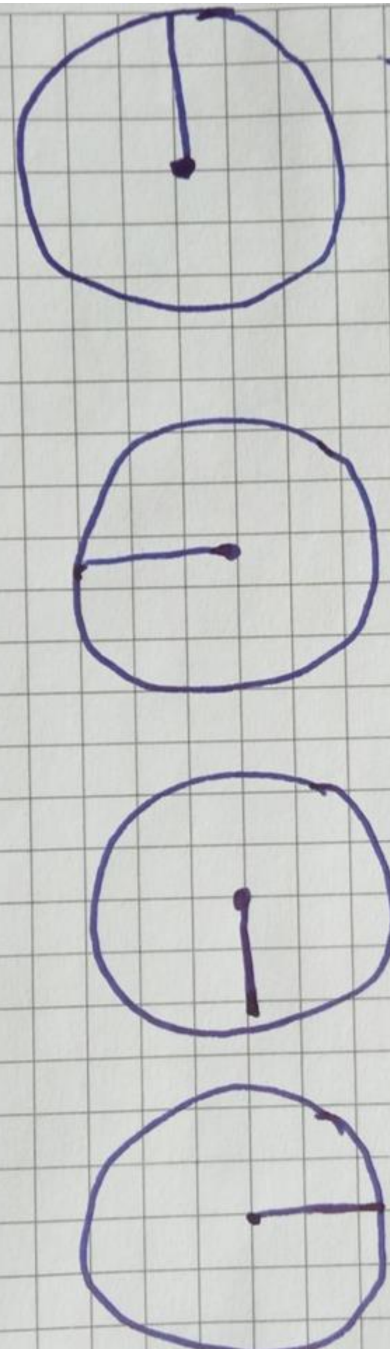
1 оборот в секунду

0

3/4

$1\frac{1}{2}$

$2\frac{1}{4}$



Напомним определения понятий дискретизации и интерполяции.
Определение. Представление непрерывного (аналогового) сигнала $x(t)$ дискретной последовательностью отсчетов $x(t_k)=x(k\Delta t)$, по которым с заданной точностью можно восстановить исходный непрерывный сигнал, называется **дискретизацией** на равномерной сетке.
Определение. Процесс восстановления дискретизированного сигнала называется **интерполяцией**.

Допустим, у нас есть непрерывное изображение $i(x,y)$. После дискретизации мы получаем дискретное изображение $I(x_k,y_m)$. Затем интерполируем его и переходим к изображению $i'(x,y)$.

Естественно возникает вопрос:

> Как нужно проводить дискретизацию, чтобы не происходила потеря информации?
> Т.е., когда возможно такое восстановление непрерывного изображения $i'(x,y)$ по дискретному $I(x_k,y_m)$, чтобы оно совпадало с исходным изображением $i(x,y)$?

Ответ на этот вопрос может быть получен из теоремы Котельникова-Шеннона.

Напомним определения пространств L_1 и L_2 и норм в них.

<u>Определение.</u> Пространством $L_1(R)$ называется пространство комплекснозначных или действительных функций , интегрируемых на множестве R.
<u>Определение</u>. Нормой элемента f в пространстве $L_1(R)$ называется величина

$$\| f \|_{L_1} = \int_R |f(x)| dx$$

<u>Определение</u>. Пространством $L_2(R)$ называется пространство комплекснозначных или действительных функций интегрируемых на множестве R с квадратом.
$L_2(R)$ – евклидово пространство, скалярное произведение для элементов f и g в нем вводится как $(f,g) = \int_R f(x)g(x)dx$.
<u>Определение</u>. Нормой элемента f в пространстве $L_2(R)$ называется величина

$$\| f \|_{L_2} = \sqrt{\int_R f^2(x)dx}$$

Преобразование Фурье $F(\gamma)$ функции $f(t)$ определяется как

$$F(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i t\gamma} dt$$

для всех $\gamma \in R$.

Обозначим через $A(R)$ множество преобразований Фурье всех функций f, принадлежащих пространству $L_1(R)$.

Теорема. Пусть $f \in L_1(R) \cap A(R)$ или $f \in L_2(R)$. Предположим, даны константы $T,\ \Omega > 0$ такие что

$$F(\gamma) \text{ равна } 0 \text{ вне сегмента } [-\Omega, \Omega] \tag{1}$$

и

$$0 < 2T\Omega \le 1. \tag{2}$$

Тогда

$$f(t) = 2T\Omega \sum f(nT) \frac{\sin[2\pi\Omega(t-nT)]}{2\pi\Omega(t-nT)}, \tag{3}$$

причем ряд сходится поточечно на R, если $f \in L_1(R) \cap A(R)$, и ряд сходится равномерно, если $f \in L_2(R)$.

Т.о., сигнал, описываемый непрерывной функцией времени $f(t)$ с спектром с конечным еносителем, полностью определяется своими значениями, отсчитанными через интервалы времени $T=1/(2\Omega)$, где Ω - ширина спектра сигнала.

Доказательство:

1) Пусть $f \in L_1(R) \cap A(R)$.

Введем функцию $G(\gamma)$

$$G(\gamma) = \begin{cases} F(\gamma), если |\gamma| < \Omega, \\ 0, если \Omega < |\gamma| \le \dfrac{1}{2T}. \end{cases}$$

Продолжим ее периодически с периодом *1/T* на *R*. Тогда можем разложить $G(\gamma)$ в ряд Фурье, имеющий вид

$$G(\gamma) = \sum c_n e^{-\pi i n \gamma (2T)} ,$$

где

$$c_n = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} G(\gamma) e^{\pi i n \gamma (2T)} d\gamma \ .$$

Из определения функции $G(\gamma)$ и из формулы обращения $f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\gamma) e^{2\pi i t\gamma} d\gamma$ следует, что $c_n = Tf(nT)$.

$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\gamma) e^{2\pi\iota\tau\gamma}\delta\gamma$ -<по формуле обращения>

$= \int\limits_{-\Omega}^{\Omega} G(\gamma) e^{2\pi i t\gamma} d\gamma$ -<по определению функции $G(\gamma)$>

$= \int\limits_{-\Omega}^{\Omega} \sum c_n e^{-2\pi i nT\gamma} e^{2\pi i t\gamma} d\gamma$ -<подставили выражение для ряда Фурье функции $G(\gamma)$>

$= \sum c_n \int\limits_{-\Omega}^{\Omega} e^{2\pi i (t-nT)\gamma} d\gamma$ -<ряды Фурье интегрируемых функций можно интегрировать почленно>

$= \sum c_n \dfrac{\sin(2\pi\Omega(t-nT))}{\pi(t-nT)}$ -<получаем простым интегрированием>

$= 2\mathrm{T}\Omega \sum f(nT) \dfrac{\sin[2\pi\Omega(t-nT)]}{2\pi\Omega(t-nT)}$ -<т.к. $c_n = Tf(nT)$, умножили и поделили на 2Ω> ,

ч.т.д.

2) Пусть $f \in L_2(R)$.

В пространстве L_2 теорема доказывается аналогично. Так же вводим функцию $G(\gamma)$, периодически продолжаем ее на R и раскладываем в ряд Фурье.

Заметим, что по определению преобразования Фурье в L_2

$$\| f(t) - \int_{-\Omega}^{\Omega} G(\gamma) e^{2\pi i t\gamma} d\gamma \|_{L_2} = 0 . \tag{5}$$

Пусть $S_n(\gamma)$ - n-я частичная сумма ряда Фурье функции $G(\gamma)$.

Введем функцию $\chi_\Omega(\gamma) = \begin{cases} 1, & \gamma \in [-\Omega, \Omega] \\ 0, & \gamma \notin [-\Omega, \Omega] \end{cases}$.

Тогда ,

$$\| \int_{-\Omega}^{\Omega} G(\gamma) e^{2\pi i t\gamma} d\gamma - \int_{-\Omega}^{\Omega} S_n(\gamma) e^{2\pi i t\gamma} d\gamma \|_{L_2}$$

$= \| \int \chi_\Omega(\gamma)(G(\gamma) - S_n(\gamma)) e^{2\pi i t\gamma} d\gamma \|_{L_2}$ -<по определению $\chi_\Omega(\gamma)$>

$= \| \chi_\Omega(\gamma)(G(\gamma) - S_n(\gamma)) \|_{L_2}$ -< по теореме Планшереля $\| f(t) \|_{L_2} = \| F(\gamma) \|_{L_2}$ >

$$= \| G(\gamma) - S_n(\gamma) \|_{L_2[-\Omega,\Omega]} . \tag{6}$$

Так как S_n - n-я частичная сумма ряда Фурье G, то

$$\lim \| G(\gamma) - S_n(\gamma) \|_{L_2[-\Omega,\Omega]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Используя это соотношение, (5) и (6), а также неравенство Гельдера и определение коэффициентов c_n, получаем требуемое в теореме равенство.

Замечания к теореме Котельникова-Шеннона .

<u>Замечание 1</u>. Основой доказательств теоремы в пространствах L_1 и L_2 является возможност перехода от преобразования Фурье к рядам Фурье.

<u>Замечание 2</u>. Исследуем вопрос о том, можно ли ослабить условие (2) теоремы. Приведенный ниже пример показывает, что этого сделать нельзя.

Допустим, константы $T,\ \Omega\ >0$ удовлетворяют неравенству $2T\Omega>1$.

Возьмем функцию $f(t)=\dfrac{\sin(\frac{\pi t}{T})}{\frac{\pi t}{T}}\in L_2(R)$.

Ясно, что преобразование Фурье этой функции $F(\gamma)=T\chi_{\left(\frac{1}{2T}\right)}(\gamma)$.

Следовательно, условие (1) выполнено.

Так как $f(nT)=\begin{cases}0, \textit{если } n\neq 0\\ 1, \textit{если } n=0\end{cases}$, то правая часть формулы (3) $g(t)=2T\Omega\dfrac{\sin 2\pi\Omega t}{2\pi\Omega t}$.

Функции f и g не равны, так как обе непрерывны на R и $f(0)=1$, а $g(0)=2T\Omega>1$.
Т.е. правая часть не равна левой части, что противоречит условию, следовательно предположение о том, что $2T\ \Omega>1$ не верно.

Замечание 3. В формуле (3) константу T обычно называют периодом дискретизации, последовательность $\{f(nT) : n \in Z\}$ –последовательностью дискретизированных значений. Частота 2Ω называется частотой Найквиста или частотой дискретизации. Это минимальная частота, с которой нужно посылать импульсы, чтобы не было потери информации.

$T \equiv \frac{1}{2\Omega}$ - максимальный период дискретизации, т.е. максимальный приемлемый промежуток времени между передаваемыми импульсами.

Замечание 4. На практике восстановленная функция $f_0(t)$, как правило, не совпадает точно передаваемой функцией $f(t)$. Ошибка обусловлена, например, тем, что спектр передаваемой функции $f(t)$ обычно ограничен не резко. Это вытекает хотя бы из того факта, что все реальные сигналы ограничены во времени и, следовательно, имеют неограниченные строго спектры. Выбор интервалов отсчетов $T > 0$ означает, что все спектральные составляющие спектра с частотами $\omega > \Omega_{\max} = \pi / T$ не передаются и не могут быть восстановлены.

Если $2T\Omega > 1$, то исходная функция не может быть восстановлена. Возникающий при этом эффект называется алиасингом - *aliasing* (переводится также как *наложение*).